



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 08.02.2025**

CLASA a 10 –a

SUBIECTE

Problema 1

a) Dacă n este un număr natural nenul și z este un număr complex de modul 1, demonstrați că $|1+z| + |1+z^{2^n}| + |1+z^{2^{n+1}}| \geq 2$.

b) Determinați valoarea minimă a sumei

$$1012 \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \dots + |1+z^{2024}| + |1+z^{2025}|$$

când z parcurge mulțimea numerelor complexe de modul 1.

Problema 2

Determinați tripletele de numere naturale (a, b, c) , pentru care numerele $\log_a(b+c)$, $\log_b(c+a)$ și $\log_c(a+b)$ sunt naturale.

Problema 3

Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt injective și îndeplinesc condiția:

$$f(x+f(y)) = f(x+y)+1, \text{ oricare ar fi numerele reale } x \text{ și } y.$$

Problema 4

a) Arătați că există un număr natural a pentru care numărul $A = \sqrt[3]{7+\sqrt{a}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{a}}$ este natural.

b) Există un număr natural b pentru care numărul $B = \sqrt{7+\sqrt[3]{b}} + \sqrt{7-\sqrt[3]{b}}$ este natural?